**MAT 2771**
**Examen Final**

**le décembre, 2010** **Professeur M. Alvo**
**Temps: 3 heures**

Numéro d'**étudiant:**____________________ Nom de famille**:** ____________

Prénom**:** ____________________________ ________________________

Cet examen est test à livre ouvert**. Les calculettes sont permises.** Répondez à toutes les questions. **Ecrivez vos réponses pour la partie A dans la table suivante. Pour la partie B,** inscrivez vos réponses directement sur le questionnaire.

| | | |
|---|---|---|
| Partie A | | |
| Partie B | 1 | |
| | 2 | |
| | 3 | |
| | 4 | |
| TOTAL | | |

**PARTIE A: Questions à choix multiples.** 4 points pour chaque bonne réponse.

Placer la lettre qui correspond a votre reponse dans l'espace prévu dans la table ci dessous.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Question | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| Réponse | D | B | B | A | E | A | C | D |
| Question | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | Total |
| Réponse | B | E | E | C | B | C | D | |

1. On lance trois dés équilibrés une fois chaque. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6?
(A) $3/6^3$ (B) $4/6^3$ (C) $7/6^3$ (D)* $10/6^3$ (E) $13/6^3$
Il y a trois ensembles de chiffres possibles: {1,1,4}, {1,2,3}. {2,2,2}. Le nombre de permutations possibles respectivement sont $\frac{3!}{2!}, 3!, 1$. Ceci donne un total $3 + 6 + 1 = 10$

2. Les étudiants en deuxième année doivent choisir au moins un cours parmi les trois cours d'analyse, algèbre et probabilité. Parmi 100 étudiants en deuxième année, 30 suivent le cours d'analyse seulement, 8 suivent le cours d'algèbre seulement et 20 suivent le cours de probabilité seulement. Si 12 étudiants suivent tous les trois cours, combien d'etudiants suivent exactement deux parmi les trois cours?

(A) 42 (B) 30 (C) 58 (D) 70 (E) 46
$100 - 30 - 8 - 20 - 12 = 30$

3. La chance que Pierre qui a présentement 35 ans vive jusqu'à 65 ans est 7/16. La chance que Paul qui a présentement 45 ans vive jusqu'à 75 ans est 2/5. Si ces événements sont indépendants l'un de l'autre, quelle est la probabilité qu'au moins un sera vivant dans 30 ans?
(A) 66/80 (B)* 53/80 (C) 14/80 (D)27/80 (E) 15/80

On calcule la probabilité que les deux meurent durant les prochains 30 ans: $(9/16)\,(3/5) = 27/80.\ Donc$ la probabilité qu'au moins un sera vivant dans 30 ans=1-27/80 = 53/80

4. Un centre de messagerie reçoit des appels selon un processus de Poisson avec en moyenne un appel à toutes les 5 minutes. Une opératrice débute son poste à 9:00 am. Quelle est la probabilité qu'elle reçoive son $10^{ième}$ appel avant 10:00 a.m.?
(A) 0.758 (B) 0.201 (C) 0.799 (D) 0.542 (E) 0.242
En moyenne on recoit 60/5=12 appels par heure. La probabilité de recevoir au moins 10 appels =1-F(9)=1-0.242=0.758

5. On revient à la question #4. Si le $10^{ième}$ appel est reçu avant 10:00 a.m., quelle est la probabilité que l'opératrice reçoive moins de 10 appels entre

10:00 a.m. et 11:00 a.m.?

(A) 0.758 (B) 0.201 (C) 0.799 (D) 0.542 (E) 0.242
Ceci est la probabilité de recevoir au plus 9 appels; F(9)=0.242

6. La fonction génératrice d'une variable aléatoire continue est donnée par

$$M(t) = \frac{1}{(1-3t)^2}, t < 1/3 \tag{1}$$

Quelle est l'espérance et la variance de cette variable?
(A)* $\mu = 6$, $\sigma^2 = 18$ (B) $\mu = 1$, $\sigma^2 = 6$ (C) $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ (D) $\mu = 6$, $\sigma^2 = 54$ (E) $\mu = 6$, $\sigma^2 = 48$;

On reconnait la densité Gamma avec paramètres $\theta = 3, \alpha = 2$. Donc l'espérance et la variance sont $\alpha\theta = 6, \alpha\theta^2 = 18$. Autre facon on voit que $\frac{d}{dt}\frac{1}{(1-3t)^2} = -\frac{6.0}{(-1.0+3.0t)^3}$ ;$\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{(1-3t)^2} = \frac{54.0}{(-1.0+3.0t)^4}$.M′(0)=6, $\mathrm{M}''(0)=54$.

7. Le revenu moyen d'une population de 500 familles est connu et égale à \$60,000 avec écart-type \$3,500. Quelle est la probabilité qu'un échantillon de 50 familles aura une moyenne qui diffère de \$60,000 par plus de \$1,000?

   (A)0.0217 (B) 0.9783 (C)* 0.0434 (D)0.8566 (E)0.4892

   On utilise la loi centrale limite pour $\bar{X}$ quand $\mu = 20000, \sigma = 3500, n = 50$. On cherche

$$\begin{aligned} P\left[\left|\bar{X} - 60000\right| > 1000\right] &= P\left[|Z| > \sqrt{50}1000/3500\right] && (2)\\ &= P\left[|Z| > 2.020\right] = 2(0.0217) && (3)\\ &= 0.0434 && (4)\end{aligned}$$

8. Dans le problème précédent calculez une borne supérieure pour cette probabilité.

   (A)0.9951 (B) 0.0049 (C) 0.070 (D)* 0.245 (E) 0.755

   Par l'inegalité de Chebyshev on voit que

$$\begin{aligned} P\left[\left|\bar{X} - 60000\right| > 1000\right] &< \frac{\sigma^2}{n\,(1000)^2} && (5)\\ &= \frac{3500^2}{50\,(1000)^2} && (6)\\ &= 0.245 && (7)\end{aligned}$$

9. $A$, $B$ et $C$ sont trois variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées selon un densité $U(0,1)$. Quelle est l'espérance de $B^2 - 4AC$?

   (A) 0 (B) -2/3 (C) -3/4 (D) -11/12 (E) 2/3
   $\mathrm{E}(\mathrm{B}^2) = V(B) - E^2(B) = 1/12 - 1/4 = 1/3$; $\mathrm{E}[\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC}] = 1/3 - 4(1/4) = -\frac{2}{3}$

10. La résistance d'un circuit est la somme de deux résistances, mesurées en ohms. Les résistances suivent des distributions normales avec respectivement des moyennes et variances $(5,1)\,,(10,1.25)\,.$ Quelle est la probabilité (à 4 décimales près)que la résistance totale du circuit soit supérieure à 13.5

ohms?

(A) 0.7476 (B)0.1587 (C) 0.9332 (D) 0.6680 (E)*0.8413

$\mathrm{P}(X_1 + X_2 > 13) = P\left(Z > \frac{13.5-15}{\sqrt{1+1.25}}\right) = P\left(Z > -1\right) = 0.9772$

11. La fonction de masse de la variable aléatoire $X$ est donnée par

$$P\left(X = x\right) = \frac{1}{5}, pour\ x = \text{-2,-1,0,1,2} \tag{8}$$

Calculer la fonction génératrice de Y=|X|.

(A) $M_Y(t) = .4 + .4e^t + .4e^{2t}$ (B) $M_Y(t) = .2\left[e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + .e^{2t}\right]$
(C) $.5e^t + .5e^{2t}$ (D) $M_Y(t) = .04\left[e^{-2t} + e^{-t} + 1 + e^t + .e^{2t}\right]^2$
(E) $M_Y(t) = .2 + .4e^t + .4e^{2t}$

12. Dans un certain cours, la note à l'examen final X suit une loi normale avec écart-type égale à 12. On sait que P$(X > 85) = 0.14$. Calculez le 20$^{ieme}$ pourcentile, c'est à dire la valeur de la constante c (à une decimale près) telle que P$(X < c) = 0.20$.

(A)72.0 (B)73.5 (C)*61.9 (D) 78.3 (E)62.6

l'équation $\frac{85-\mu}{12} = 1.08$, donnent $\mu = 63.4$. Alors $\frac{c-\mu}{\sigma} = -0.842$ donne $c = 61.936$

13. Calculer la moyenne d'une variable aléatoire $X$ ayant la fonction de répartition suivante:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -5 \\ .3 & \text{si } -5 \leq x < -2 \\ .4 & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ .8 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ .9 & \text{si } 4 \leq x < 6 \\ 1.0 & \text{si } 6 \leq x \\ \end{cases}$$

(A) 8.1 (B) -0.3 (C) 0.3 (D) 3.1 (E) 0

$E(x) = (.3)\,(-5) + (.1)\,(-2) + (.4)\,(1) + (.1)\,(4) + (.1)\,(6) = -0.3$

14. Si X et Y sont indépendants et suivent des distributions de $\chi^2$ avec 6 et 9 degrés de liberté respectivement, quelle est la probabilité que X+Y soit supérieur à 25?
(A)0.10 (B)0.20 (C)*0.05 (D) 0.60 (E)0.40
$P\left(\chi^2\left(15\right) > 25\right) = 0.05$

15. Les Senateurs d'Ottawa ont une probabilité de 0.3 de gagner une partie de hockey. En supposant que l'équipe participe au dernier tournoi pour la coupe Stanley, quelle est la probabilité que l'équipe gagne la quatrième partie au septième jeu?
(A)$(0.3)^4$ (B)35$(0.3)^7\,(0.7)^4$ (C)20$(0.3)^3\,(0.7)^4$ (D)* 20$(0.3)^4\,(0.7)^3$
(E)35$(0.3)^4\,(0.7)^3$
C'est une binomiale négative avec p =0.3, x=7,r=4.

**Partie B: Questions à réponses. Chaque question vaut 10 points. Inscrivez vos réponses directement sur le questionnaire. Définissez clairement vos notations et montrez tous vos calculs.**

1. Soit deux variables aléatoires indépendantes X,Y qui ont des densités uniforme sur l'intervalle (0,1).

a) Quelle est la densité de V= maximum (X,Y)?

b) Calculer P$(0 < V < 0.5)$ ?

(a) (2) P(V$\leq v) = P\left(X \leq v\right) P\left(Y \leq v\right) = v^2$; $\mathrm{f}_V\left(v\right) = 2v$

(b) (2) $\mathsf{P}(0 < V < 0.5) = (0.5)^2 = 0.25$

c) (3) Calculer $\mathsf{E}[V]$

$\mathsf{E}[V] = \int_0^1 2v^2 dv = \frac{2}{3}$

d) (3) Calculer la fonction génératrice de V.

$\mathsf{M}_V(t) = \int_0^1 2v \exp(vt)\, dv = 2\frac{e^t t - e^t + 1}{t^2}$

M'(t)=$\frac{d}{dt} 2\frac{e^t t - e^t + 1}{t^2} = 2\frac{e^t t^2 - 2e^t t + 2e^t - 2}{t^3}$; to compute the limit as $t \to 0$, we use l'Hopital's rule

$\frac{2\frac{d}{dt}\left(e^t t^2 - 2e^t t + 2e^t - 2\right)}{\frac{d}{dt}(t^3)} = \frac{2}{3}e^t$; at t=0, it is 2/3 as before.

2. Air Canada en général vent plus de billets pour un vol en comparaison avec le nombre de sièges disponibles car certain passagers ne réclament pas leur siège à la dernière minute. En autres mots, s' il y a $K$ sièges sur le vol, Air Canada vendera $n$ billets où $n > K$. Soit $p$ la probabilité qu'un passager ne réclame pas son siège. On suppose que les passagers agissent tous indépendament l'un de l'autre. Calculer (approximativement si nécessaire) la probabilité que tous les passagers qui arrivent au terminal seront siègés. (Aide: Si X dénote le nombre de passagers qui ne réclament pas leur siège parmi les n, n-X sera le nombre de passagers qui réclament leur vol. Quel doit être la valeur minimal de X?)

(a) (3) $K = 20$ sièges sur le vol, $p = .10$ et $n = 25$ passagers ont acheté des billets.

X~B(n,p). On cherche P(X$\geq n - K) = P(X \geq 5) = 1 - F(4) = 1 - 0.9020 = 0.098$

(b) (3) $K = 395$ sièges sur le vol, $p = .01$ et $n = 400$ passagers ont acheté des billets.

$\lambda = np = (0.01)\,400 = 4.0$; On utilise la loi Poisson. On cherche P(X$\geq n - K) = P\left(X \geq 5\right) = 1 - F\left(4\right) = 1 - 0.629 = 0.371$

(c) (4) $K = 370$ sièges sur le vol, $p = .10$ et $n = 400$ passagers ont acheté des billets.

$np = (0.1)\,400 = 40.0, \quad np\,(1-p) = (0.1)\,(0.9)\,400 = 36.0$. On utilise l'approximation normale. On cherche

$$
\begin{aligned}
\text{P(X} &\geq n - K) = P\,(X \geq 30) && (9)\\
&= P\left(Z \geq \frac{29.5-40}{6}\right) && (10)\\
&= P\,(Z \geq -1.75) && (11)\\
&= 0.9599 && (12)
\end{aligned}
$$

3. Soit $X$ une variable aléatoire ayant une distribution de khi deux $\chi^2$ avec 25 degrés de liberté.

(a) (4) Démontrer que

$$P(X \leq x) \approx \Phi\left(\frac{x-25}{\sqrt{50}}\right).$$

Justifier cette approximation et citer clairement tout théorème utilisé.

(b) (3) Utiliser le résultat dans (a) pour approximer $P(X \leq 16.47)$.

$$P(X \leq 16.47) \,\tilde{}\, \Phi\left(\frac{16.47-25}{\sqrt{50}}\right) = \Phi(-1.2063) = 0.1139$$

(c) (3) Trouver la valeur exacte de $P(X \leq 16.47)$.

$$P(X \leq 16.47) = P\left(\chi^2(25) \leq 16.47\right) = 0.10$$

4. La densité d'une variable aléatoire X est donnée par le polynôme suivant

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{c} kx(1-x), 0 < x < 1 \\ 0 \; autrement \end{array} \right\} \qquad (13)$$

$$(14)$$

a) Calculer la valeur de la constante k

b) Calculer la fonction de répartition de X

(a) (2) $\int_0^1 x(1-x)\,dx = \frac{1}{6}$; k=6

(b) (3) $F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) & 0 < x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

c) (3) Calculer $\mathsf{P}[X > 0.75|X > 0.5]$

$\mathsf{P}[X > 0.75|X > 0.5] = \frac{\mathsf{P}[X>0.75]}{\mathsf{P}[X>0.5]} = \frac{1-F(0.75)}{1-F(0.5)} = \frac{1-\frac{27}{32}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{5}{16} = 0.3125$

d) (2) Calculer directement $\mathsf{E}[X]$

$E(X) = \int_0^1 6x^2 (1-x)\, dx = \frac{1}{2}$

Fun problem (not for the final) (Suduko) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes ayant densité conjointe donnée par le tableau suivant. X peut prendre les valeurs -1,0,1 et Y peut prendre les valeurs 10, 20, 30.

| | | | $y$ | | $P(X=x)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 10 | 20 | 30 | |
| | $-1$ | 0.05 | $u_1$ | $u_2$ | |
| $x$ | 0 | $u_3$ | $u_4$ | 0.20 | 0.50 |
| | 1 | $u_5$ | $u_6$ | $u_7$ | |
| | | | | | |
| $P(Y=y)$ | | 0.20 | | | |

(15)

a) Completer le tableau ci dessus?

[aide: calculer dans l'ordre suivant $u_2$, $u_4$,$u_3$]

b) Calculer $\mathsf{P}(X = 1, Y = 30)$.

c) Calculer $\mathsf{P}(X = 1|Y = 30)$.

Reponse $u_3 = 0.1$, $u_4 = 0.2, u_5 = 0.05, u_1 = u_2 = u_6 = u_7 = 0.1$; $\mathsf{P}(X = 1, Y = 30) = u_7 = 0.1$;

$\mathsf{P}(X = 1|Y = 30) = \frac{u_7}{u_2+u_7+0.20} = \frac{0.1}{0.4} = 0.25$